

小波域边缘保持规整化图像复原

曹学光 易沫 汪雪林 彭思龙

(中国科学院自动化研究所国家专用集成电路设计工程技术研究中心,北京 100080)

摘要 图像复原是一个病态问题,一般需要通过规整化技术得到一个合适的解。规整化的难点在于抑制噪声的同时要保持图像的边缘等重要的图像信息。为了更有效地保持复原图像的边缘,提出了小波域边缘保持规整化泛函的一般形式,并给出了相应的求解方法。针对小波域图像复原方法可能产生的 Gibbs 效应,利用自然图像小波变换的水平(竖直)子带在水平(竖直)方向的连续性,通过额外的惩罚项加以解决。仿真实验结果说明了该方法的有效性。

关键词 边缘保持规整化 Gibbs 效应 Markov 随机场 位势函数

中图分类号: TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2006)02-0224-06

Image Restoration with Edge-preserving Regularization in Wavelet Domain

CAO Xue-guang, YI Mo, WANG Xue-lin, PENG Si-long

(National ASIC Design Engineering Center, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract Image restoration is an ill posed problem and must be regularized. Usually, the difficulty of regularization lies in avoiding the smoothing of edges while suppressing the noise. In order to preserve the edges of restored image effectively, a general wavelet based edge-preserving regularization scheme and the corresponding solving scheme are proposed. To get rid of the Gibbs effects of restoration algorithms in wavelet domain, the natural image's horizontal (vertical) continuity in horizontal (vertical) sub-band together with added punishment are employed. Experiments are presented which verified the theoretical results.

Keywords edge-preserving regularization, Gibbs effects, Markov random field, potential function

1 引言

图像复原的主要目的是要改善给定的观测图像的质量,利用某种先验知识,使降质的观测图像恢复并接近原始未失真的图像。图像的线性降晰退化过程的数学模型可以写成矩阵-向量形式:

$$g = Hf + \xi \quad (1)$$

式中 g 、 f 和 ξ 分别是观测图像、原始图像和噪声的堆积向量, H 是由降晰核生成的降晰矩阵。线性图像复原问题就是在已知 g 、 H 以及噪声 ξ 的统计特

性的情况下,求得一个关于 f 的估计值 \hat{f} 。

从观测图像 g 中重构出图像 f 通常都是一个病态的问题。这就需要通过附加一个先验的限制来对解进行规整化,即图像复原的规整化技术^[1]。这个限制称为规整化函数(在马尔可夫随机场(MRF, Markov random field)中被称为位势函数)。一个简单常用的规整化方法就是认为图像是全局平滑的,并且导致一个二次规整化泛函。虽然二次规整化泛函可以产生一个线性的算法,并且对噪声不敏感,但得到的却是一个平滑解^[2]。如何在应用平滑性约束的同时保证图像的细节信息就是边缘保持规整化

基金项目:国家自然科学基金项目(60272042,10171007)

收稿日期:2004-09-13;改回日期:2005-06-14

第一作者简介:曹学光(1977 ~),男。现为中国科学院自动化研究所模式识别与智能系统专业博士研究生。主要研究方向为图像处理、小波理论、模式识别等。E-mail: cao_xue_guang@yahoo.com.cn

(edge-preserving regularization)。边缘保持规整化将导致一个非二次的规整化泛函。Geman 和 Yang^[3]提出了“半二次规整化”(half quadratic regularization)的概念来解决这种非线性优化问题。而 Charbonnier 等人^[4]比较全面地论述了边缘保持规整化函数应该具备的条件。由于小波^[5]特别适合于描述图像中的边缘信息,小波域边缘保持规整化的图像复原方法是目前研究非常活跃的一个领域^[6-8]。

本文从基于 Markov 随机场的最大后验概率(MAP, maximum a posteriori)估计出发,给出了小波域边缘保持规整化泛函的一般形式,并提供了相应的求解方法。另外,利用自然图像小波变换的水平(竖直)子带在水平(竖直)方向的连续性,通过额外的惩罚项来消除小波域复原方法可能产生的 Gibbs 效应。

2 基于 MRF 的 MAP 估计

如果将图像视为一个 Markov 随机场,利用 Markov 随机场和 Gibbs 随机场的等价性^[8],可以得到随机场的联合概率分布。将分布函数作为一种先验知识结合到图像复原问题中,这为复原和估计图像提供了 Bayesian 框架,即按照最大后验概率(MAP)来估计图像:

$$\hat{f}_{\text{MAP}} = \arg_f \min \{ -\log p(g|f) - \log p(f) \} \quad (2)$$

必须定义条件概率 $p(g|f)$ 和 f 的先验概率 $p(f)$ 。条件概率 $p(g|f)$ 与系统的观测噪声紧密相关,如果噪声为高斯白噪声,条件概率具有高斯分布形式:

$$p(g|f) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{M/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \|g - Hf\|_2^2 \right\} \quad (3)$$

先验概率 $p(f)$ 的选择是 MAP 估计的一个核心问题。MRF 以其灵活性和较强的实用性得到深入研究和广泛的应用。由于 MRF 与 Gibbs 场的等价性^[8],在利用 MRF 来指定图像 f 的先验概率时,通常以 Gibbs 函数的形式给出:

$$p(f) = \frac{1}{Z} \exp(-U(f)) \quad (4)$$

式中, Z 为归一化常数, $U(f)$ 为先验能量,表示为

$$U(f) = \sum_{c \in C} V_c(f) \quad (5)$$

$V_c(\cdot)$ 是与簇 c 关联的位势函数。一个簇 c 表现了位置之间的一种相互作用或纹理的一种基本构成,

而 C 为图像所有簇的集合。这样图像复原问题的 MAP 估计可以转化为一个泛函最小化问题:

$$\hat{f} = \arg_f \min \left\{ \frac{\|g - Hf\|_2^2}{2\sigma^2} + U(f) \right\} \quad (6)$$

很明显,能量函数 $U(f)$ 的合理选择与复原图像的质量紧密相关。不同的能量函数将导致不同的图像模型和复原算法。在空间域图像复原中,能量函数的一般形式为

$$U(f) = \sum_{i=1}^K \lambda_i \Phi_i(R_i f) \quad (7)$$

式中, $R_i, i=1, \dots, K$ 为规整化算子,通常为各种一阶、二阶或更高阶差分算子的矩阵表示。若假定图像是分片光滑的,则只需考虑一阶或者二阶差分即可^[9]。 λ_i 是相应的规整化参数, $\Phi_i(R_i f) = \sum_{j=1}^M \varphi_i([R_i f]_j)$, $\varphi_i(\cdot)$ 为位势函数, $[R_i f]_j$ 表示向量 $R_i f$ 的第 j 个分量。因此在空间域中, f 基于 MRF 的 MAP 估计可以通过最小化下式得到:

$$J(f) = \|g - Hf\|_2^2 + \sum_{i=1}^K \alpha_i \sum_{j=1}^M \varphi_i([R_i f]_j) \quad (8)$$

式中, $\alpha_i = 2\sigma^2 \lambda_i$ 为新的规整化参数。

式(8)中位势函数 φ_i 的具体形式对图像估计的好坏起着关键作用。Charbonnier 等人^[4]提出了边缘保持规整化位势函数所应满足的一般性条件,同时提出了求解可能出现的非线性规整化泛函的确定性优化方法,即使用规整化的代数重建技术(ARTUR)。

3 小波域边缘保持规整化图像复原

3.1 图像复原问题在小波域中的描述

为了在小波域对式(1)所示的图像复原问题进行描述,将原始图像记为 a_0 ,表示在最小尺度 0 上的尺度系数。尺度 j 上的尺度系数 a_j ,经一次小波分解后产生尺度 $j+1$ 上的尺度系数 a_{j+1} 以及水平、竖直和对角方向的小波系数 $d_{j+1}^{(k)}, k=1,2,3$ 。以上过程对 a_{j+1} 可以迭代进行下去,从而得到原始图像的多层小波分解。 \tilde{f} 为所有小波和尺度系数的辞书式排列向量。

对式(1)两边进行正交小波变换^[5],可得复原问题在小波域中的描述:

$$\begin{aligned} Wg &= (WHW^T)Wf + W\xi \\ \tilde{g} &= \tilde{H}\tilde{f} + \tilde{\xi} \end{aligned} \quad (9)$$

式中, W 为 2 维小波变换矩阵, \tilde{g}, \tilde{f} 和 $\tilde{\xi}$ 分别为观测

图像、原始图像以及噪声在小波变换后的尺度和小波系数向量。 \tilde{H} 为线性降阶算子 H 的小波域表示,即 $\tilde{H} = WHW^T$ 。这里只考虑正交小波变换情况,因而 $W^T W = I$ 。 $\tilde{\xi}$ 仍然为方差为 σ^2 的零均值的高斯白噪声^[5]。图像 f 经 J 级正交小波分解后,可由一组子带图像 $\{a_j, d_j^{(k)}; j=1, \dots, J, k=1, 2, 3\}$ 来表达。

3.2 小波域边缘保持规整化

在图像小波分解中,将各子带滤波器视为规整化算子 $R_i, i=1, \dots, 3J+1, J$ 为图像分解的层数,类比空间中基于 MRF 的 MAP 估计,可以得到小波域边缘保持规整化图像复原的一般形式:

$$J(\tilde{f}) = \|\tilde{g} - \tilde{H}\tilde{f}\|_2^2 + \alpha_j^{(0)} \sum_{k=1}^{M_{j,0}} \varphi([a_j]_k) + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^3 \alpha_j^{(i)} \sum_{k=1}^{M_{j,i}} \varphi([d_j^{(i)}]_k) \quad (10)$$

式中, $M_{j,i}$ 表示位于尺度 j 、方向 i 的子带系数个数, $\alpha = [\alpha_j^{(0)}, \alpha_j^{(i)}; j=1, \dots, J, i=1, 2, 3]$ 为相应的规整化参数, $\varphi(t)$ 为位势函数。依据图像不同尺度以及不同方向等局部特征来选择规整化参数 α 以及位势函数中的模型参数就可以自适应地控制规整化的程度^[6]。规整化参数 α 的选择可以采用 L-超平面 (L-hypersurface) 方法^[6,7]。

为了有效保持复原图像中的边缘,位势函数 $\varphi(t)$ 应满足边缘保持位势函数应该满足的基本假定和边缘保持条件^[4]。一般说来,上述的条件保证了对较大的小波系数值(主要对应于图像中的边缘)的惩罚要弱于对较小的小波系数值的惩罚。表 1 中列举了几个可作为小波域边缘保持规整化的位势函数。

表 1 几个典型的具有边缘保持作用的位势函数

Tab.1 Several potential functions with edge-preserving

位势函数 $\varphi(t)$	凸性	$\varphi'(t)/(2t)$
$\varphi_{GM} = t^2/(1+t^2)$	否	$t/(1+t^2)^2$
$\varphi_{HL} = \ln(1+t^2)$	否	$1/(1+t^2)$
$\varphi_{HS} = 2\sqrt{1+t^2} - 2$	是	$1/\sqrt{1+t^2}$
$\varphi_{CR} = 2\log[\cosh(t)]$	是	$\tan h(t)/t, t \neq 0$

例如小波域自适应边缘保持规整化图像复原^[7]中的规整化函数为 $\varphi_{HS}(t) = 2\sqrt{1+t^2} - 2$ 。对于局部高斯模型^[10],能量函数式对应的位势函数为 $\varphi(w_i) = (w_i/\lambda_i)^2$,其中,自适应参数 λ_i 正比于小波系数 w_i 处的局部标准方差。利用非线性半二次规整化泛函的确定性求解方法^[4],式(10)的最小化可

通过以下交替优化方法进行求解:

$$D^{(n+1)} = \text{diag} \left[\frac{\alpha_i \varphi'(\tilde{f}_i^{(n)})}{2\tilde{f}_i^{(n)}} \right]_{i=1}^M \quad (11)$$

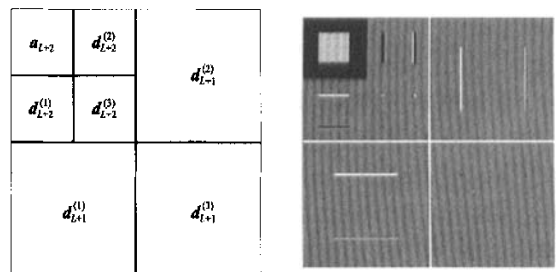
$$(\tilde{H}^T \tilde{H} + D^{(n+1)}) \tilde{f}^{(n+1)} = \tilde{H}^T \tilde{g} \quad (12)$$

算法迭代从 $\tilde{f}^{(0)} = \mathbf{0}$ 或 $\tilde{f}^{(0)} = \tilde{g}$ 开始。式(11)、式(12)的迭代终止条件为 $\|\tilde{f}^{(n+1)} - \tilde{f}^{(n)}\| / \|\tilde{f}^{(n)}\| \leq \varepsilon, \varepsilon$ 为一小正常数(如 $\varepsilon = 10^{-5}$)。为了保证上述迭代过程的收敛性,位势函数 φ 还必须满足收敛条件^[4],即 $\varphi^{(3)}(0) = 0$ 以及 $\varphi^{(4)}(0)$ 存在。在满足上述各种条件下,若 $\varphi(t)$ 还满足为凸函数的限制,则式(10)有唯一极小化解 \tilde{f}^* ,并且当 $n \rightarrow \infty$ 时,通过迭代式(11)和式(12)得到的 $\tilde{f}^{(n)}$ 收敛于 \tilde{f}^* ;如果放宽 $\varphi(t)$ 为凸函数的限制,算法仍然收敛但得到的解可能为局部最优解。式(12)是关于 $\tilde{f}^{(n+1)}$ 的线性方程组,由于 \tilde{H} 无法用循环矩阵近似,其求解只能转化到空间域并通过共轭梯度法进行。

3.3 考虑边缘连续性的小波域规整化

由于正交小波变换不具有平移不变性,通过上述规整化方法得到的复原图像往往存在轻微的 Gibbs 效应,主要表现为图像边缘处的轻微锯齿现象,即边缘的不连续性。可以利用 Cycle-spinning 方法对此现象加以抑制,但这会造成计算量的大大增加。

对于一般的自然图像,其小波域的水平子带图像 $d_j^{(1)}$ 在水平方向上保持着较强的连续性,即 $d_j^{(1)}$ 的水平梯度值应该比较小;而竖直子带图像 $d_j^{(2)}$ 在竖直方向上也保持着较强的连续性,即 $d_j^{(2)}$ 的竖直梯度值应该比较小。如图 1(b) 所示的一个正方形图像的小波变换子带图像。 $d_j^{(1)}$ 在水平方向有连续性,而 $d_j^{(2)}$ 在竖直方向上有连续性。



(a) 小波变换子带分布图 (b) 正方形的小波变换

图 1 水平与竖直方向的连续性

(其中黑、灰和白像素分别对应正、零和负的小波系数)
Fig.1 Continuity in horizontal and vertical
(black, gray and white pixels denote positive, zero and negative wavelet coefficients)

考虑这种边缘连续性的先验信息,就可以抑制复原图像边缘处的锯齿现象。即在式(10)中增加如下的额外惩罚项:

$$U_2(\tilde{f}) = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1,2} \lambda_j^{(i)} \sum_{k=1}^{M_{j,i}} \varphi_2([\mathbf{D}_j^{(i)} \mathbf{d}_j^{(i)}]_k) \quad (13)$$

其中对惩罚函数 $\varphi_2(t)$ 的要求与前面对位势函数 $\varphi(t)$ 的要求相同。 $\mathbf{D}_j^{(i)}$ 是水平($i=1$)或竖直($i=2$)方向的一阶差分算子或二阶差分算子的矩阵实现。惩罚项 $U_2(\tilde{f})$ 的意义是限制水平子带在水平方向的高频信息以及竖直子带在竖直方向的高频信息,以增加其水平和竖直方向的平滑性。可以看出惩罚项将鼓励水平和竖直方向边缘的形成,同时可以保持对角方向的边缘信息。惩罚函数 $\varphi_2(t)$ 应该能够保持水平(竖直)子带在水平(竖直)方向的强烈跳变同时抑制噪声引起的不光滑性,即认为图像的水平(竖直)子带在水平(竖直)方向具有分段平滑的特点。 $\lambda_j^{(i)}$ 为各个子带对应惩罚项的加权系数,其选择与 $\alpha_j^{(i)}$ 的选择相似^[6,7]。考虑式(13)所示的额外的惩罚 $U_2(\tilde{f})$ 项后,式(10)将变成:

$$J(\tilde{f}) = \|\tilde{g} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{f}\|_2^2 - \alpha_j^{(0)} \sum_{k=1}^{M_{j,0}} \varphi([\mathbf{a}_j]_k) + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^3 \alpha_j^{(i)} \sum_{k=1}^{M_{j,i}} \varphi([\mathbf{d}_j^{(i)}]_k) + U_2(\tilde{f}) \quad (14)$$

式(14)的求解也可以利用非线性半二次规整化泛函的确定性求解方法^[4]。相比于式(10),式(14)的求解过程中增加的计算量主要为求取惩罚项 $U_2(\tilde{f})$ 中的加权系数所需的计算量,因而增加的计算量并不大。较之利用 Cycle-spinning 方法来抑制 Gibbs 效应更具有效性。

4 实验结果及分析

进行两组仿真实验,第1组实验为对表1中所列举的各种位势函数在空间和小波域进行图像复原的对比实验;第2组实验是对比直接小波域边缘保持规整化与考虑边缘连续性的小波域规整化图像复原算法的结果,验证考虑边缘连续性后的小波域规整化复原算法的有效性。实验的硬件环境为 Matlab6.5, P4 1.8GHz 和 128M 内存。采用大小为 256×256 的标准测试图像 Lena, Bridge 和 Mandrill 图像进行仿真实验。实验中用方差为 2 的高斯卷积核对未失真图像卷积生成实验用的降晰图像,并添加均匀高斯白噪声使 Lena 图像和 Bridge 图像的信噪比(SNR)为 35dB,

Mandrill 图像的信噪比为 30dB。

为了检验图像复原的效果,采用峰值信噪比(PSNR)与主观视觉效果相结合的方法来评价图像复原的效果。峰值信噪比定义为

$$\text{PSNR} = 10 \log \frac{255^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |X_i - \hat{X}_i|^2} \quad (15)$$

式中, X 为标准测试图像, \hat{X} 为经过复原后的图像, N 为像素点总数。

4.1 空间域和小波域边缘保持规整化的比较

空间域边缘保持规整化复原算法对应的规整化泛函为式(8),其具体求解过程可参考 Charbonnier 等人提出的求解非线性规整化泛函规整化的代数重建技术(ARTUR)^[4]。实验中各个位势函数对应的参数均调整到最佳值。对于小波域边缘保持规整化图像复原方法,参考 Belge 等人^[10,11]提出规整化参数确定方法来确定规整化参数,即令 $\alpha_j^{(0)} = \alpha_1$, $\alpha_j^{(i)} = \alpha_2 2^{\gamma(j-i)}$, $\gamma \approx 1.2$, 其中 α_1, α_2 可通过实验或 L-曲线(L-curve)方法确定。小波分解和重建采用长度为 6 的 Daubechies 小波(即 db3)^[5]。式(10)中的优化过程只需对复原图像最高频的 6 个子带进行,求解式(12)时的共轭梯度法迭代次数为 30 次左右,算法的外层循环经 2~3 次迭代即可收敛。在利用 Cycle-spinning 方法消除小波域规整化产生的 Gibbs 效应时只需对平移序列图像中的两幅进行复原即可。

表 2 显示了 Lena、Bridge 和 Mandrill 图像利用表 1 中所列的位势函数进行空间域和小波域边缘规整化图像复原结果的峰值信噪比的结果。从实验可以看出,小波域复原算法较之空间域复原算法,其复原结果的 PSNR 有比较明显的提高。空间域算法运行时间为 35s 左右,而在利用 Cycle-spinning 方法消除小波域规整化产生的 Gibbs 效应时使得计算量大大增加,算法运行时间为 70s 左右。

4.2 考虑边缘连续性的小波域规整化

在这一组实验中,对比在小波域直接进行边缘规整化图像复原(没有采用 Cycle-spinning 方法消除 Gibbs 效应)和考虑边缘连续性后的小波域边缘规整化图像复原,来验证后者的有效性。即分别利用式(10)和式(14)对降晰图像进行复原。其中的位势函数 φ 和 φ_2 选择为相同的函数(如表 1 中所列的一些函数),式(10)和式(14)中的规整化参数 a 一致,规整化参数 $\lambda_j^{(i)}$ 的选择与 $\alpha_j^{(i)}$ 相似,即 $\lambda_j^{(i)} =$

$\lambda_2 2^{\gamma(L-j)}$, $\gamma \approx 1.2$ 。复原结果相对于原始图像 PSNR 值分别如表 2 所示。从仿真实验的结果可以看出,在考虑边缘的连续性后(最小化式(14)),得到的复原图像确实可以消除小波域规整化产生的 Gibbs 效应,从而得到具有连续边缘的复原图像。其复原结果的 PSNR 值较之空间域(最小化式(8))有比较明显的提高,而与采用 Cycle-spinning 方法消除 Gibbs 效应的小波域复原结果相当,甚至更佳。考虑边缘

连续性后的小波域边缘规整化图像复原算法运行时间约为 45s 左右。其计算量相对于空间域的相对应的算法,增加并不大;而相对于小波域采用 Cycle-spinning 方法消除 Gibbs 效应的计算量则大大减少了。为了对比细节,在图 2(c)和(d)中给出了 Lena 测试图像在采用表 1 中的 $\varphi_{GM}(t)$ 复原结果的局部细节图像。

表 2 表 1 中的位势函数在空间域式(8)和小波域式(10)和考虑边缘连续性式(14)后的复原结果 PSNR 对比
 Tab.2 Compare results of image restoration in spatial domain (8), wavelet domain (10) and based on continuity of edges (14) based on the functions displayed in Tab.1 and in (10), cycle-spinning is used to remove Gibbs effects 单位: dB

	$\varphi_{GM} = t^2 / (1 + t^2)$			$\varphi_{HL} = \ln(1 + t^2)$			$\varphi_{HS} = 2\sqrt{1 + t^2} - 2$			$\varphi_{GR} = 2\log[\cos h(t)]$		
	式(8)	式(10)	式(14)	式(8)	式(10)	式(14)	式(8)	式(10)	式(14)	式(8)	式(10)	式(14)
Lena	28.10	29.54	30.11	27.52	29.60	29.70	28.52	29.67	30.42	28.24	29.67	30.20
bridge	24.24	25.19	26.23	24.21	25.20	26.22	24.44	25.29	26.43	23.99	25.19	25.10
mandrill	28.54	29.76	30.55	28.73	29.80	30.70	28.83	29.88	30.80	29.08	29.89	30.75



(a) Lena 原始图像



(b) 模糊降析图像, SNR = 35 dB



(c) 利用式(10)复原, PSNR = 28.69 dB



(d) 利用式(14)复原, PSNR = 30.11 dB

图 2 Lena 图像的复原结果
 (其中的位势函数 φ 和 φ_2 均选择为表 1 中的 φ_{GM})
 Fig.2 Restoration result for Lena
 (the potential functions φ and φ_2 are all φ_{GM})

5 结 论

为了更有效地保持复原图像的边缘,从空间域基于 Markov 随机场 MAP 估计理论框架出发,提出了小波域边缘保持规整化泛函的一般形式,并给出了相应的求解方法。对几种常用的具有边缘保持能力的位势函数进行了实验和分析。另外还利用自然图像小波变换的水平(竖直)子带在水平(竖直)方向的连续性,来解决小波域复原方法可能产生的 Gibbs 效应,即通过在小波域边缘保持规整化泛函的一般形式上附加一个额外的能量惩罚项来消除可能产生的 Gibbs 效应。该方法可以有效地消除复原过程中产生的 Gibbs 效应,但是使得数学模型变得比较复杂,降低模型的复杂度以及选择更为合理的惩罚函数将是进一步研究的内容。

参考文献 (References)

- 1 Tikhonov A N, Arsenin V Y. Solutions of Ill-posed Problems[M]. Washington, DC: V. H. Winston & Sons, 1977.
- 2 Andrews H C, Hunt B R. Digital Image Restoration[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977.
- 3 Geman D, Yang C. Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1995, 4(7): 932 ~ 946.
- 4 Charbonnier P, Blanc-Feraud L, Aubert G, *et al.* Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(2): 198 ~ 311.
- 5 Stéphane Mallat. A Wavelet Tour of Signal Processing[M]. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1999.
- 6 Belge M. Multiscale and Curvature Methods for the Regularization of the Linear Inverse Problems [D]. Boston, Massachusetts: Northeastern University, 1999.
- 7 Begle M, Kilmer M E, Miller E L. Wavelet domain image restoration with adaptive edge-preserving regularity [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(4): 597 ~ 608.
- 8 Geman S, Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(6): 721 ~ 741.
- 9 Geman S, Reynolds G. Constrained restoration and the recovery of discontinuities [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(3): 367 ~ 383.
- 10 WANG Xue-lin, HAN Hua, PENG Si-long. Image restoration based on wavelet-domain local Gaussian model [J]. Journal of Software, 2004, 15(3): 443 ~ 450. [汪雪林, 韩华, 彭思龙. 基于小波域局部高斯模型的图像复原 [J]. 软件学报, 2004, 15(3): 443 ~ 450.]